Memoria Técnica – 01
VIBRACIONES

Analiza la dinámica de máquinas rotantes, el montaje sobre elementos elásticos y lo relaciona con prácticas habituales utilizadas en el montaje de equipos de HVAC

Daniel Rodrigo Magro
21/02/2012

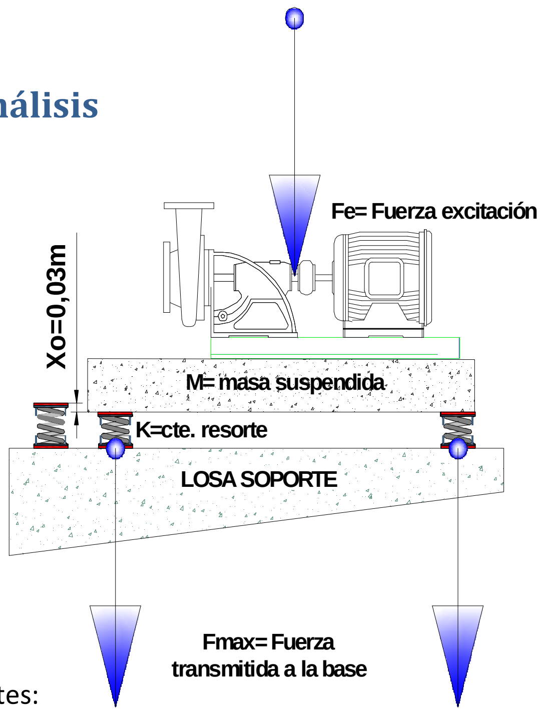
➢ Objeto de la memoria técnica.

Existen muchos tratados técnicos donde se analizan las ecuaciones que describen los movimientos y esfuerzos puestos de manifiesto cuando una masa suspendida sobre un elemento elástico es excitada por una fuerza externa de tipo periódica.

Tal es el caso de una máquina rotante montada sobre elementos elásticos que al funcionar oscila.

Esta memoria tiene por objeto interpretar y sacar conclusiones de lo que nos predicen las ecuaciones que describen la dinámica del proceso asociado al montaje de una máquina sobre elementos anti-vibratorios.

➢ Planteo del problema objeto del análisis



El diagrama muestra un caso típico de una máquina, en este caso una bomba centrífuga que debe ser montada sobre una losa de soporte. El conjunto muestra todos los elementos que generalmente se utilizan en el montaje "anti vibratorio" y que trataremos de analizar y cuantificar de qué manera influyen en el conjunto MÁQUINA/ANTI-VIBRATORIO

En el croquis se muestran distintos elementos componentes:

- Por un lado la propia máquina que tiene su masa estática y su masa rotante.
- Por otro lado el bloque debajo de la máquina por encima de los resortes, comúnmente llamada "base inercial"
- Los resorte, que se muestran en su estado libre y cuando sobre ellos descansa la máquina mas el bloque inercial.
- La fuerza de excitación que es producto del desequilibrio de la masa rotante.
  - o El desequilibrio de la masa rotante es producto de que el centro del conjunto de masas rotantes están desplazados del eje de rotación. Comunmente llamado "desbalanceo".
  - o Como producto del desbalanceo las masas rotantes transmiten a las partes no rotantes de la máquina (estator de motor y cuerpo de bomba) una fuerza cuya característica es del tipo $\boldsymbol{f(t) = F * sen(w.t)}$. Siendo f(t) la fuerza

transmitida a las partes no rotantes que varían con el tiempo t. Esta fuerza es del tipo armónica, siendo $\boldsymbol{\omega}$ la pulsación que equivale a $\boldsymbol{\omega = 2 * \pi * fn}$.

- o $\boldsymbol{F}$, es el módulo o valor máximo de la fuerza de excitación y $\boldsymbol{fn}$ es la frecuencia de excitación que está en ciclos por segundo y coincide con las rpm de la máquina dividido por 60.

- La masa suspendida es la suma de todas las masas, rotantes, no rotantes y el bloque inercial. Está expresada en Kg. Masa
- Los resortes por efecto de la carga de la máquina mas el bloque inercial acortan su distancia, el valor en que se acortan se denomina deflexión estática del resorte. Está expresada en metros. ***Mas adelante veremos que es un indicador muy útil.***
- Finalmente la fuerza que los resortes transmiten a la losa de apoyo como producto de las vibraciones (no la debida al peso de la máquina mas el bloque inercial) la denominamos $\boldsymbol{fmax}$.

El problema a resolver es:

Conociendo:

Las rpm de la máquina

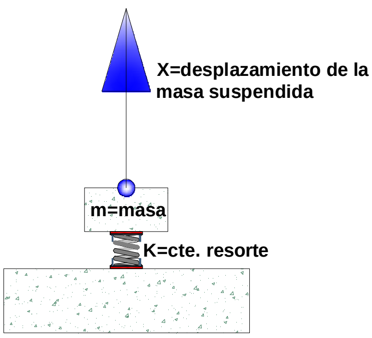
El peso

Las características de la losa de apoyo

Determinar el tipo de antivibratorio requerido y si es necesario o nó el uso de un bloque de inercia y su correspondiente masa.

➢ Ecuaciones que describen el movimiento

En primer lugar recordaremos cómo se comporta una masa suspendida sobre un elemento elástico (un resorte)



Si tenemos un conjunto como el mostrado en la figura, y lo apartamos de su condición de reposo, al soltarlo se moverá y podemos plantear la siguiente ecuación de la dinámica de la masa:

La sumatoria de las fuerzas intervinientes en la masa m será$= \boldsymbol{m * a}$

Siendo $\boldsymbol{m}$ la masa suspendida y $\boldsymbol{a}$, la aceleración de dicha masa.

La única fuerza que actúa sobre el bloque es $-\boldsymbol{k * x}$ siendo $\boldsymbol{k}$ la constante del Elemento elástico y $\boldsymbol{x}$ el desplazamiento.

$$m * a = -k * x \Longrightarrow m * a + k * x = 0 \Longrightarrow a + \frac{k}{m} * x = 0$$

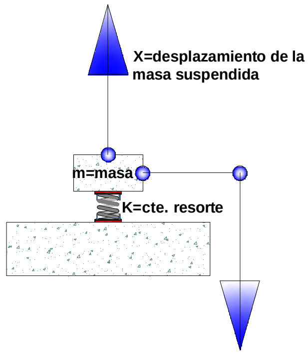
Como $\quad a = \frac{d^2x}{dt^2}$ escribimos la ecuación anterior como $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} * x = 0$

La solución a esta ecuación diferencial de segundo órden es

$$X(t) = Xo * cos(\sqrt{\frac{k}{m}}.t).$$

Esta solución nos dice que al sistema, si se lo aparta de su condición de reposo, le "gusta moverse" con un movimiento armónico cuya amplitud es Xo que equivale al valor en que lo apartamos del reposo y con una pulsación $Wo = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Anteriormente vimos que $\omega = 2 * \pi * f$ por lo tanto la primera conclusión es que el sistema oscilará con una frecuencia $fo = \frac{Wo}{2\pi}$. A esta frecuencia se la llama "frecuencia natural del conjunto masa-elemento elástico" y es la frecuencia a la que el sistema le **"gusta vibrar"**



Ahora si a la masa suspendida la excitamos con una fuerza

$f(t) = F * sen(w.t)$**,** que es la originada por el desbalanceo

de la máquina rotante, la ecuación de equilibrio la podemos escribir

$$f(t) = F * sen(w.t)$$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} * x = \frac{F}{m} * sen(w.t)$ (F, aparece dividida por m pues antes para quitar m del término de segundo órden dividimos toda la ecuación por m)

No desarrollaremos la solución de esta ecuación, nos limitaremos a indicarla y analizar los resultados que nos permitirán interpretar la función de cada componente de un sistema de amortiguamiento.

La solución tiene una forma $\qquad x(t) = Ao * cos(w.t)$

Siendo $Ao = \frac{F/m}{\sqrt{(Wo^2 - W^2)^2}}$ **Ec. 1**

La primera conclusión es que si la máquina gira a una velocidad tal que (W) coincida con la frecuencia natural (Wo) el denominador se hace cero y tendríamos amplitudes infinitas. Condición de **RESONANCIA**

Ahora nos detendremos un minuto en analizar que sucede ya que realmente las amplitudes no son infinitas pese a que muchos de nosotros tuvimos la oportunidad de ver una máquina girando a una velocidad coincidente con la frecuencia natural. Si bien las amplitudes no son infinitas sí son muy grandes y apreciables a simple vista por como se "SACUDE LA MÁQUINA"

¿Por qué no son infinitas?

La razón por la que no son infinitas es porque en el estudio realizado hasta ahora hemos omitido un factor de amortiguamiento al analizar las ecuaciones.

¿pero qué es un factor de amortiguamiento?

No es nada raro ni sacado de la manga, el análisis realizado hasta ahora es ideal pues supone que no existe ninguna fuerza de rozamiento viscoso que intervenga en el análisis y que disipe energía. Si la agregáramos aparecería un término con un coeficiente proporcional a la velocidad, es decir proporcional a $\frac{dx}{dt}$

En el caso de un automóvil el elemento de rozamiento viscoso es el amortiguador, hoy generalmente son hidráulicos, algunos antiguos eran de rozamiento de un ferodo contra otro.

En muelles para el montaje de máquinas puede observarse una malla de acero inoxidable dentro del las espiras del resorte.

Si consideramos el factor de amortiguamiento f, la ecuación a resolver es la siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f}{m} * \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} * x = \frac{F}{m} * sen(w.t) \qquad \textbf{Ec. 2}$$

La solución de esta ecuación tiene la forma

$$x(t) = Ao * cos(w.t + \emptyset) \qquad \text{siendo Ao,} \qquad \textbf{Ec. 3}$$

$$Ao = \frac{F/m}{\sqrt{(Wo^2 - W^2)^2 + (f * w/m)^2}}$$ **f** [Nt*s/m]es el factor de amortiguamiento **Ec. 4**

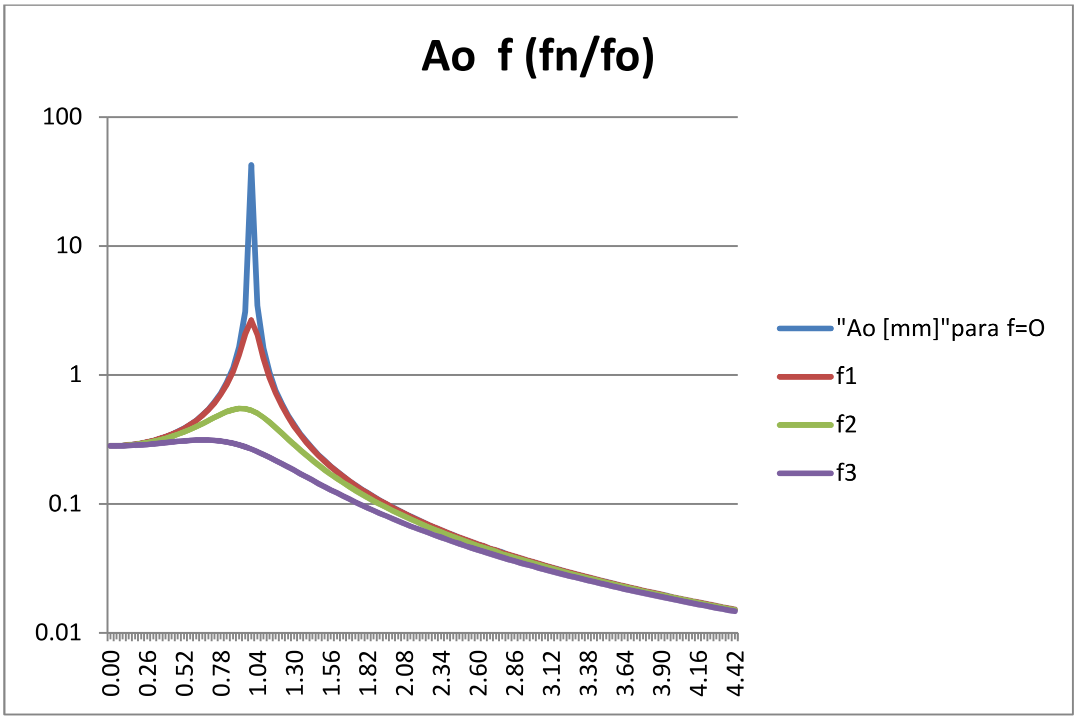


Gráfico 1

Graficamos la ecuación que describe las amplitudes de oscilación de una masa suspendida sobre resortes con una relación k/m tal que coincida con una $\mathbf{w_o}$ equivalente a 3Hz (180rpm).

El gráfico comienza con una máquina rotando a 50rpm, conforme aumenta la velocidad, aumenta la amplitud de las oscilaciones, hasta que al llegar a la relación $\frac{f_n}{f_0} = 1$ la amplitud toma valores muy grandes (condición de resonancia).

Una vez pasada la condición de resonancia la amplitud comienza a descender.

Algunas conclusiones:

- Para frecuencias de excitación menores que la frecuencia natural del conjunto, las amplitudes siempre crecen a medida que Fo se acerca a Fn, para hacerse infinito cuando Fo=Fn.
- Para frecuencias de excitación superiores a la Frecuencia natural del conjunto, las amplitudes siempre decrecen.
- Cuando Fe/Fn=$\sqrt{2}$ la amplitud con la que oscila el sistema es la mínima comparada con las oscilaciones antes de Fo, a partir de este valor al aumentar la velocidad de la máquina la amplitud de oscilación decrece aún mas y sigue decreciendo. Decimos que pasada la relación Fe/Fn=$\sqrt{2}$ estamos en zona de atenuación.

Veamos ahora que sucede con la fuerza transmitida a la base.

$$Tr = \frac{\sqrt{Wo^4+(f*w/m)^2}}{\sqrt{(Wo^2-W^2)^2+(f*w/m)^2}} \quad \textbf{Ec. 5}$$

Si graficamos el factor de transmisibilidad Tr, que es cuantas veces se transmite a la base la fuerza producto del desequilibrio, obtenemos:

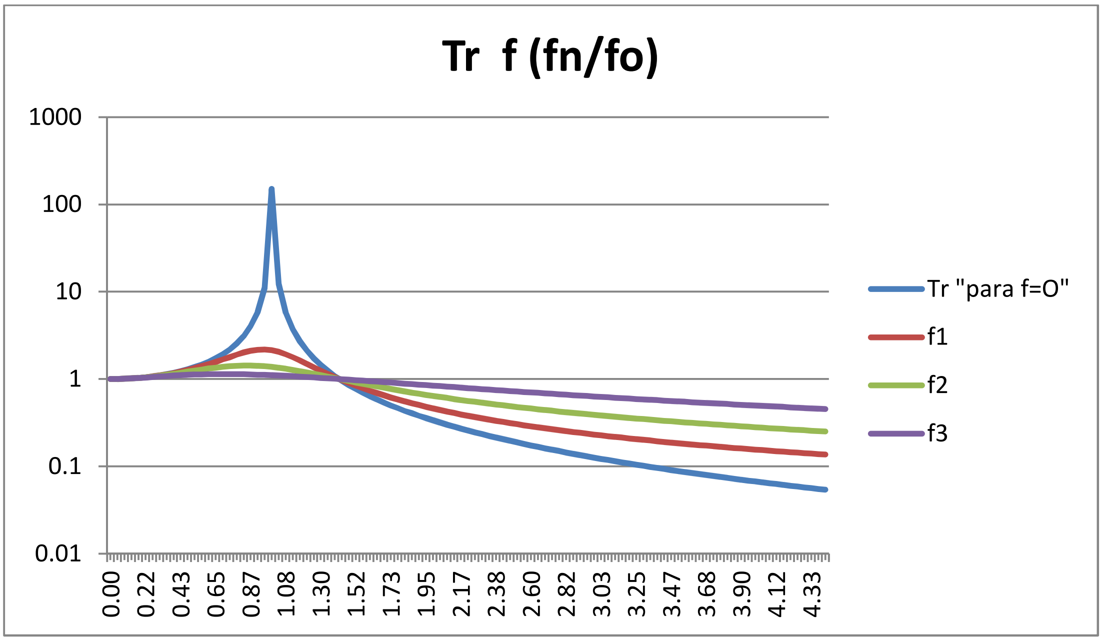


Gráfico 2

Algunas conclusiones del gráfico:

- Algunas conclusiones son similares a las analizadas para el gráfico anterior,
  - A medida que Fe/Fn se aproxima a 1, la fuerza transmitida aumenta hasta hacerse "muy grande" conforme alcanzamos la resonancia.
  - Vemos que el factor de amortiguamiento viscoso f, disminuye esta fuerza, por lo que podemos considerar que a frecuencias de rotación inferiores a la natural del sistema k/m, el amortiguamiento viscoso (disipativo) contribuye a disminuir la fuerza transmitida.
- Pero cuando pasamos la zona de Fe/Fn=$\sqrt{2}$ el amortiguamiento viscoso conforme aumenta, hace aumentar la fuerza transmitida respecto de si no lo hubiera.
- Por lo tanto el amortiguamiento viscoso ayuda mientras que la máquina gira por debajo de la zona crítica pero perjudica cuando pasamos esta zona.

Pero entonces…amortiguamiento disipativo ¿si? ó ¿no?

Muchos ingenieros que analizaron el tema, concluyen que la elección del amortiguamiento viscoso es un compromiso entre las mejoras que este ofrece durante el arranque y la merma en amortiguación que produce a velocidades superiores a la crítica.

Estoy en total acuerdo con esta apreciación, probablemente no convenga recurrir a elementos disipativos cuando las máquinas funcionen siempre lejos de Fn y considerarlos cuando se trate de máquinas grandes que puedan funcionar períodos prolongados en valores próximos a Fn.

Bloque inercial

Es frecuente encontrar que máquinas rotantes son montadas sobre un gran bloque de hormigón y todo el conjunto a su vez montado sobre muelles helicoidales.

¿Qué función cumple el bloque de hormigón?

En el análisis realizado hasta ahora hemos considerado a la masa suspendida como constante y la llamamos "m", luego analizamos el comportamiento del sistema k-m y su respuesta a fuerzas de desequilibrio cuando cambia la frecuencia de excitación (la velocidad de la máquina).

Ahora vamos a analizar el mismo sistema k-m pero supondremos que gira a una velocidad fija e iremos variando la masa suspendida pero manteniendo la relación $Wo = \sqrt{\frac{k}{m}}$ constante .

Observando la Ec.4 es predecible el resultado.

Veamos a continuación el gráfico 3

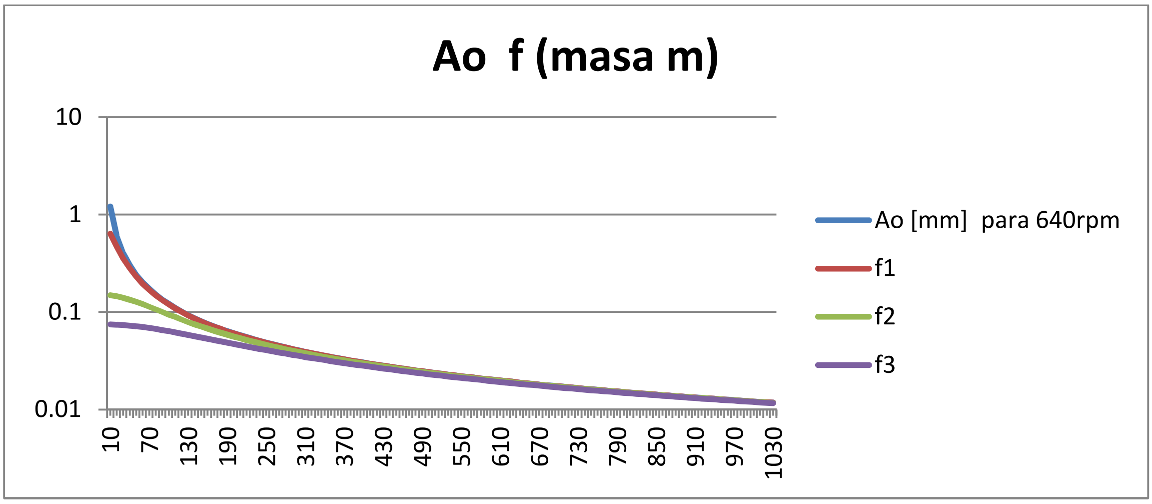


Gráfico 3

El gráfico nos muestra cómo disminuye la amplitud de las oscilaciones cuando aumenta la masa suspendida (cuando agregamos un bloque inercial) y en general poco varía con el amortiguamiento disipativo.

Veamos a continuación el gráfico 4

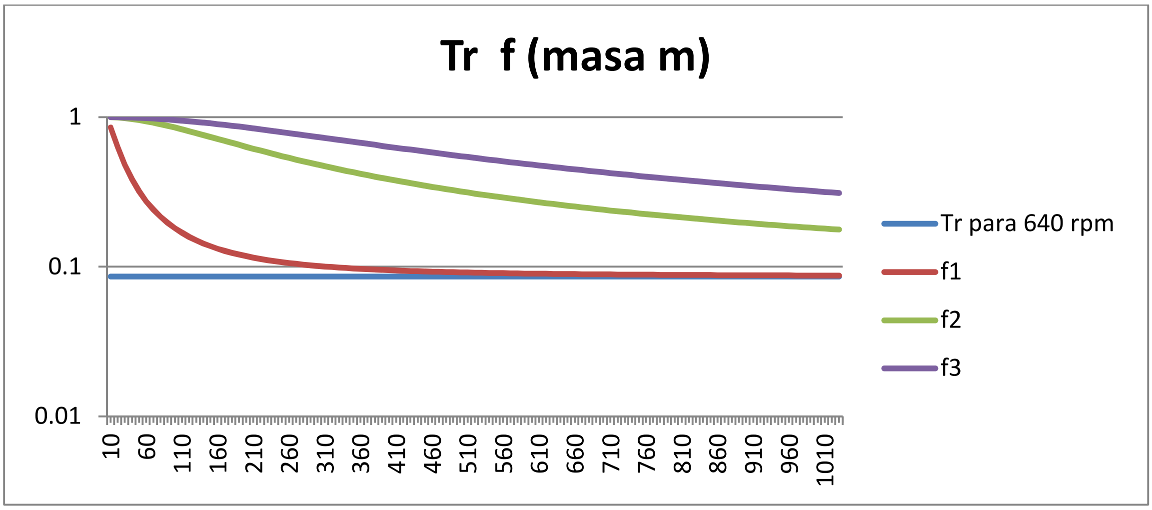


Gráfico 4

Aquí graficamos como varía la fuerza transmitida al aumentar la masa suspendida.

La línea Tr para 640 rpm representa la variación cuando no hay amortiguamiento viscoso, es **siempre constante!!!** Y es muy razonable ya que si en la ecuación Ec5 hacemos f=0 la ecuación se hace independiente de m.

Conclusión del uso del bloque inercial

Para una máquina rotante montada sobre elementos elásticos sin amortiguador disipativo, el bloque inercial solo disminuye las amplitudes de las oscilaciones y en nada contribuye a disminuir las fuerzas dinámicas transmitidas a la losa

Elementos elásticos

Como elementos elásticos utilizados durante el montaje antivibratorio de una máquina rotante generalmente utilizamos elementos que bajo carga se acortan en forma proporcional a la carga que soportan.

Tal es el caso de resortes helicoidales que presentan una característica

$F = -k * x$ siendo k la constante de proporcionalidad y x el acortamiento que se produce bajo la acción de la fuerza F

Supongamos ahora que una máquina cuyo peso es P se apoya sobre un conjunto de resortes cuya constante de proporcionalidad es k, bajo la acción del peso P los resortes se acortarán en un valor $x = -\frac{P}{k}$ el signo – solo indica dirección.

Anteriormente vimos que $wo^2 = \frac{k}{m}$ por lo tanto $m * wo^2 = k$ y $P = m * g$ reemplazando

$wo^2 = \frac{g}{x}$ Donde x es la deflexión estática del elemento elástico, y es cuanto se acorta bajo la acción del peso de la máquina.

MASA SUSPENDIDA	200	200	200	200	200	200	200	200	**Kg.**
RELACIÓN f_n/f_0	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	
VEL DE GIRO	2500	2000	1500	1000	700	500	300	200	**rpm**
FRECUENCIA EXCITACIÓN	41.7	33.3	25.0	16.7	11.7	8.3	5.0	3.3	Hz
FRECUENCIA NATURAL	11.9	9.5	7.1	4.8	3.3	2.4	1.4	1.0	Hz
DEFLEXIÓN ESTÁTICA	0.2	0.3	0.5	1.1	2.2	4.4	12.2	27.4	**cm**
AMORTIGUAMIENTO	91.1 %	91.1 %	91.1 %	91.1 %	91.1 %	91.1 %	91.1 %	91.1 %	**%**

Cuadro 1

En el cuadro anterior mostramos que cuanto mas rápida es la máquina, menos deflexión estática requerirá el elemento elástico para lograr la misma atenuación, mientras que para una máquina que gire a 200rpm necesitaríamos un resorte cuya deflexión estática sea 27.4cm!!!

Habitualmente las especificaciones técnicas solicitan que el amortiguamiento sea> 95%.....

Una conclusión del cuadro anterior es que para máquinas que giren a 1500rpm y mas los <u>resortes no aportan mucho</u> con elementos elásticos a base de caucho obtenemos el amortiguamiento necesario (ISOMODE o soportes de CAUCHO), mientras que para máquinas de 1000rpm para abajo difícilmente obtengamos un buen amortiguamiento sino es con muelles helicoidales.

Bombas centrífugas

Una bomba centrífuga en una máquina rotante cuya masa rotante es muy pequeña comparada con la masa suspendida que no rota.

Los desequilibrios de las masas rotantes (impulsor, rotor del motor) son muy pequeños pues generalmente están muy bien balanceados, el mayor de los inconvenientes es el desalineamiento del conjunto motor-bomba.

Las bombas centrífugas generalmente son máquinas rápidas, giran a 1450rpm o mas . En los gráficos mostrados, el valor mas grande de absisas corresponde a una máquina que gira a 796rpm (13.3Hz) montada sobre un elemento elástico cuya relación $Wo = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es 3Hz.

Pueden haber aplicaciones donde las bombas estén impulsadas por variadores de velocidad (VFD) en cuyo caso al reducir la velocidad de rotación nos movemos en el eje de absisas hacia la izquierda, pero rara vez ingresaremos a la zona de resonancia, dado que una bomba centrífuga puede regularse entre el 40% y 100% de su velocidad, ya que por debajo del 40% la regulación es despreciable.

Finalmente queda el transitorio de arranque, cuando la bomba se pone en marcha, es decir desde velocidad cero hasta que pasa la resonancia. Personalmente en aire acondicionado no he visto que hayan bombas que montadas sobre elementos elásticos al arrancar hagan notorio el pasaje por la zona de resonancia.

En este caso el amortiguamiento disipativo no es significativo.

Para bombas que giran a 1500 rpm, puede ser suficiente montaje sobre ISOMODE, CAUCHO, o CORCHO, ya que según el cuadro 1, para una máquina que gira a 1500 rpm con un elemento elástico cuya deflexión estática sea de 5mm obtendremos una atenuación del 91.1%.

Ventilador centrífugo

A diferencia de las bombas centrífugas, ventiladores grandes (peso superior a 150Kg.) son máquinas donde la masa del rotor del ventilador es considerable frente al resto de la masa del propio ventilador. Además suelen ser máquinas que el rotor es lento (alrededor de 500rpm o a veces menos).

Estas máquinas puede resultar conveniente montarlas sobre muelles helicoidales, y adicionar bloques inerciales.

Además hoy donde el uso de los variadores de velocidad es frecuente, una máquina de por sí lenta, al reducir su velocidad sí es posible que el funcionamiento se produzca en zonas próximas a resonancia y se aprecien oscilaciones mayores que a régimen. En estos casos se impone excluir el rango de velocidades críticas en la programación del VFD.

¿Es necesario siempre montar una máquina sobre elementos elásticos?

La respuesta es claramente NOOOOO!!!!

Supongamos que en una central Hidráulica debemos montar un ventilador cuyo rotor pesa 40Kg. ¿Qué sentido tiene montarlo sobre resortes? Es comparable a si un mosquito chocara frontalmente con una locomotora!!! El maquinista solo se entera si el mosquito le pegó en el parabrisas!!!! …pero porque le dificulta la visión.

Por lo tanto siempre debe evaluarse el tamaño de la máquina frente a la masa y rigidez de su apoyo.

Para ventiladores que su peso total sea de hasta 50Kg, difícilmente se aprecien vibraciones en la estructura si se los monta sin interponer elementos elásticos en construcciones convencionales.

Por otro lado se le atribuye a un buen montaje antivibratorio una contribución en aumentar la vida útil de rodamientos. ¿hasta dónde es así?

Una máquina rotante tiene una parte fija (digamos un estator) y una parte rotante (rotor).

El rotor es el que si posee un desequilibrio produce una fuerza de desbalanceo que es transmitida directamente a los cojinetes, y desde estos al estator.

Ahora el estator puede estar solidario a un bloque inercial y todo el conjunto montado sobre resortes que transmiten el esfuerzo a la losa, piso, etc.

Lo cierto es que la fuerza producto del desbalanceo siempre existe!!! En tanto exista el desbalance y es transmitida por los cojinetes!!!

Con un montaje adecuado, solo disminuimos la fuerza que el conjunto transmite a la losa, piso, etc. Pero la fuerza producto del desbalanceo del rotor **siempre está!!!**

Entonces, con un buen montaje antivibratorio, si la fuerza del rotor siempre está, y no es transmitida a la base, ¿Dónde fue?

Esa energía se almacena en forma elástica, parte se disipa en el amortiguamiento dispativo si existe, pero siempre **es transmitida por los rodamientos!!! Desde su origen (el rotor desbalanceado), y a través de los rodamientos, al conjunto masa no rotante suspendida/ losa o piso.**

Datos prácticos que pueden resultar de utilidad

- Si buscamos amortiguar la fuerza de desequilibrio que una máquina rotante transmite al piso o losa de apoyo,
    a. La máquina siempre debería funcionar por encima de la frecuencia natural del conjunto masa-resorte.
    b. Con una relación de fn/fo > 3.5 obtenemos atenuaciones de 91.1%
    c. La deflexión estática, cuanto desciende la máquina cuando se la apoya sobre los resortes es un indicador,
        i. Para máquinas que giren a 1500 rpm o mas con 5mm será suficiente.
        ii. Para máquinas girando entre 1000-1500rpm, buscaremos que la deflexión estática se encuentre entre 11 y 5mm.
        iii. Para máquinas girando entre 500-1000rpm, buscaremos que la deflexión estática se encuentre entre 44 y 11mm.